PRIMO TEST (Algebra lineare)

30 gennaio 2013

Esercizio 1. Considerati, in $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$, i sottospazi:

$$A_k = < \begin{pmatrix} k+2 & 0 \\ k & k-1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ k+1 & 1 \end{pmatrix} >, \qquad B_k = < \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k-3 \end{pmatrix} >, \qquad k \in \mathbb{R}$$

determinare:

(a) al variare di k, le dimensioni di A_k e B_k; $\boxed{4}$
[$\dim A_k = 2$ per ogni $k \in \mathbb{R}$; $\dim B_k = 2$ se $k \neq 2$, altrimenti $\dim B_2 = 1$.]

(b) i valori di k per i quali la somma tra i due sottospazi è diretta; $\boxed{6}$
[$k \neq 0$]

(c) posto $k = 2$, una base per un complemento diretto di A_2. $\boxed{2}$
[$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$]

Esercizio 2. Siano $M_k \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{R})$ e $v_k \in \mathbb{R}^3$ la matrice e il vettore seguenti:

$$M_k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ k-1 & k-1 & 0 \\ 2 & k & 2 \end{pmatrix}, \qquad \vec{v_k} = \begin{pmatrix} 0 \\ k \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad k \in \mathbb{R}.$$

Determinare:

(a) al variare di k, il rango della matrice M_k; $\boxed{2}$
[$k = 1$: $\mathrm{rg} M_k = 1$, $k \neq 1$: $\mathrm{rg} M_k = 2$]

(b) al variare di k, la compatibilità del sistema $M_k \vec{x} = \vec{v_k}$ e il numero delle soluzioni; $\boxed{3}$
[$k = 1$: nessuna soluzione, $k \neq 1$: compatibile, ∞^1 soluzioni]

(c) posto $k = 0$, l'insieme S_0 delle soluzioni; $\boxed{2}$
[$\{(a, -a, 1/2 - a) \in \mathbb{R}^3 \ : \ a \in \mathbb{R}\}$]

(d) al variare di k, gli autovalori della matrice M_k e le rispettive molteplicità algebriche e geometriche; stabilire per quali valori di k la matrice è diagonalizzabile; $\boxed{10}$
[Se $k \neq 1, 3$, autovalori: $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = k - 1$, per ciascuno di essi m.a.=m.g.=1;
se $k = 1$, $\lambda_1 = \lambda_3 = 0$ con m.a.=m.g.=2, $\lambda_2 = 2$ con m.a.=m.g.=1;
se $k = 3$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$ con m.a.=2 e m.g.=1, $\lambda_1 = 0$ con m.a.=m.g.=1;
matrice diagonalizzabile per $k \neq 3$]

(e) posto $k = 1$, diagonalizzare la matrice M_1 e indicare una matrice diagonalizzante. $\boxed{4}$

$$\left[D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},\ P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right]$$